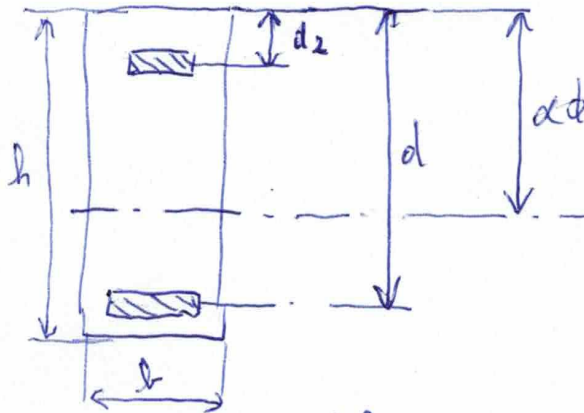


DETAIL DES CALCULS POUTRE BETON

1

Caractéristiques géométriques poutre



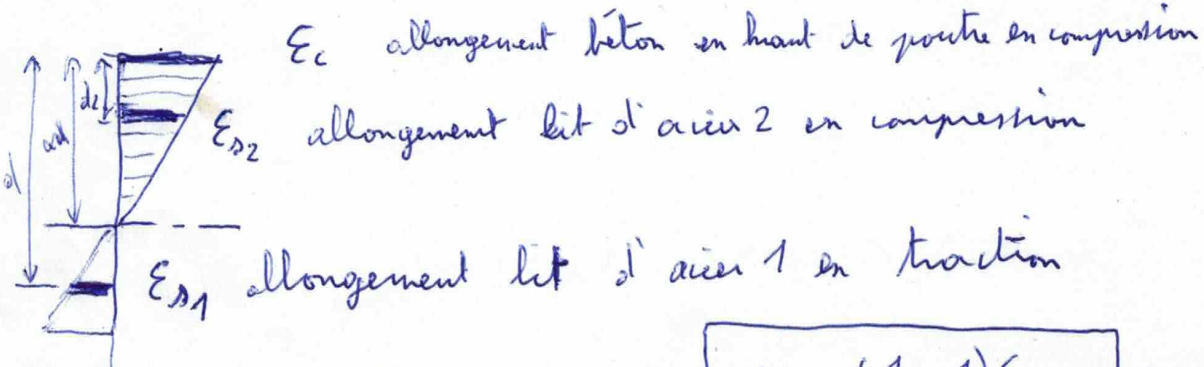
armatures supérieures section S_2

ligne neutre

armatures inférieures section S_1

Note: pour simplification on ne déduit pas la section d'acier comprimé dans la section de béton comprimée

Diagramme des déformations



$$\frac{\epsilon_c + \epsilon_{s1}}{d} = \frac{\epsilon_c}{\alpha d} = \frac{\epsilon_{s2}}{\alpha d - d_2} \Rightarrow$$

$$\epsilon_{s1} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \epsilon_c \quad (1)$$

$$\epsilon_{s2} = \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d} \right) \epsilon_c \quad (2)$$

Relations d'élasticité des matériaux

on suppose toujours rester en domaine élastique pour les aciers car la plastification n'apporte que peu de gain

$$\sigma_{s1} = E_s \epsilon_{s1} \quad (3)$$

$$\sigma_{s2} = E_s \epsilon_{s2} \quad (4)$$

et

si $\epsilon_c < \epsilon_{ce}$

ou

si $\epsilon_c > \epsilon_{ce}$

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c \quad (5)$$

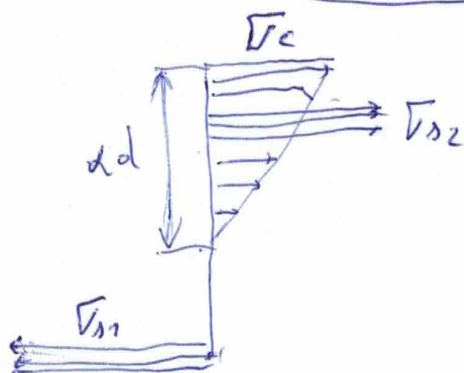
domaine élastique

ou

domaine plastique

Domaine élastique :

Diagramme des contraintes



Équilibre de la section

$$\boxed{\frac{1}{2} (b \alpha d \sigma_c) + A_{s2} \tau_{s2} = A_{s1} \tau_{s1}} \quad (6)$$

relation F_{int} / Contrainte

$$M_f = \sum M(\sigma) / \text{cdg axes}$$

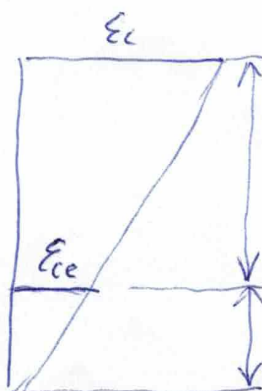
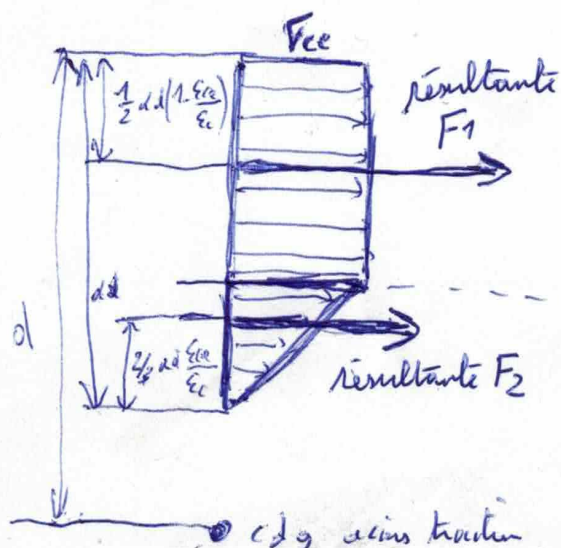
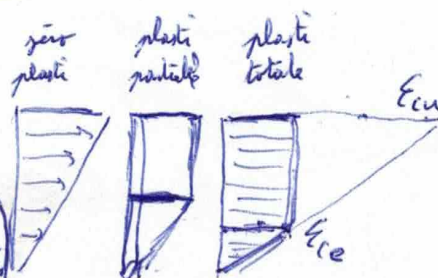
$$M_f = \left(d - \frac{1}{3} \alpha d\right) \left(\frac{1}{2} b \alpha d \sigma_c\right) + (d - d_2) \tau_{s2} A_{s2}$$

$$\boxed{M_f = (1 - \alpha/3) \frac{b d^2}{2} \sigma_c + (d - d_2) A_{s2} \tau_{s2}} \quad (7)$$

Domaine plastique

Diagramme des contraintes

(contraintes axes non représentés)



$$\alpha d \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right)$$

$$\alpha d \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}$$

diagramme des déformations nécessaires pour situer la limite zone plastifiée zone non plastifiée

Équilibre de la section

$$F_1 = b \alpha d \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right) \sigma_{ce} \quad (6')$$

$$F_2 = \frac{1}{2} b \alpha d \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \sigma_{ce}$$

$$\boxed{b \alpha d \sigma_{ce} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right) + A_{s2} \tau_{s2} = A_{s1} \tau_{s1}}$$

relation Fint / Contrainte

$$M_f = \sum M(\sigma) / \sigma_d \text{ avec } \sigma_1$$

$$M_f = M_f(F_1) + M_f(F_2) + (d - d_2) A_{s2} \sigma_{s2}$$

$$M_f = \left[d - \frac{\alpha d}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right) \right] b \alpha d \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right) \sigma_{ce} + \left(d - \alpha d + \frac{2}{3} \alpha d \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right) b \alpha \frac{d}{2} \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \sigma_{ce} + (d - d_2) A_{s2} \sigma_{s2}$$

$$M_f = b \alpha d^2 \sigma_{ce} \left[\left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right) \right] \left(1 - \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right) + \left[1 - \alpha + \frac{2}{3} \alpha \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right] \frac{\epsilon_{ce}}{2 \epsilon_c} \right] + (d - d_2) A_{s2} \sigma_{s2}$$

$$\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} + \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right)^2 + \left(\frac{1 - \alpha}{2} \right) \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} + \frac{1}{3} \alpha \left(\frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right)^2$$

$$= (1 - \alpha/2) + \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \alpha \frac{\epsilon_{ce}^2}{\epsilon_c^2}$$

$$= -\frac{\alpha}{6} \left(\frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} \right)^2 + \frac{\alpha - 1}{2} \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} + 1 - \alpha/2$$

$$M_f = b \alpha d^2 \sigma_{ce} \left(-\frac{\alpha}{6} \frac{\epsilon_{ce}^2}{\epsilon_c^2} + \frac{\alpha - 1}{2} \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} + 1 - \frac{\alpha}{2} \right) + (d - d_2) A_{s2} \sigma_{s2}$$

(7')

Domaine Plastique Béton et acier : non calculé car presque aucun intérêt de plastifier l'acier car cela fait diminuer α donc simplifie la limite de béton

Résolution

$$\text{données : } \begin{cases} b & h & d & d_2 & A_{s1} & A_{s2} \\ \sigma_{ce} & \epsilon_{ce} & E_c & E_s & & \\ M_f & & & & & \end{cases}$$

$$\sigma_{ce} = E_c \epsilon_{ce}$$

$$\text{inconnues : } \alpha \quad \epsilon_c \quad \epsilon_{s1} \quad \epsilon_{s2} \quad \sigma_c \quad \sigma_{s1} \quad \sigma_{s2}$$

équations déformations (2), élasticité (3), eqn (4), Fint Fext (1)

7 équations $\rightarrow$ 7 inconnues $\Rightarrow$ résolution possible

détermination de α

équation (6) (3) (4) $\Rightarrow$

$$0,5 b d \alpha E_c \epsilon_c = A_{s1} E_s \epsilon_{s1} - A_{s2} E_s \epsilon_{s2}$$

équation (1) (2) $\Rightarrow$

$$(6') \Rightarrow -0,5 b d \alpha E_c \epsilon_c + A_{s1} E_s \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \epsilon_c - A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \epsilon_c = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5 b d \alpha E_c + A_{s1} E_s \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5 b d E_c \alpha^2 + (A_{s1} E_s - A_{s2} E_s) \alpha + A_{s2} E_s + A_{s2} E_s \frac{d_2}{\alpha d} = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5 b d \frac{E_c}{E_s} \alpha^2 + (A_{s1} + A_{s2}) \alpha - \left(A_{s1} + A_{s2} \frac{d_2}{d}\right) = 0$$

$$\frac{0,5 b d E_c}{(A_{s1} + A_{s2}) E_s} \alpha^2 + \alpha - \frac{A_{s1} + A_{s2} \frac{d_2}{d}}{A_{s1} + A_{s2}} = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \left(\frac{0,5 b d E_c}{(A_{s1} + A_{s2}) E_s} \right) \left(- \frac{A_{s1} + A_{s2} \frac{d_2}{d}}{A_{s1} + A_{s2}} \right)$$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2 \times \frac{0,5 b d E_c}{(A_{s1} + A_{s2}) E_s}}$$

α est indépendant de la charge en domaine élastique fonction uniquement des proportions acier béton

détermination de ϵ_c puis ϵ_{s1} ϵ_{s2} $\bar{\epsilon}_c$ $\bar{\epsilon}_{s1}$ $\bar{\epsilon}_{s2}$

$$(7) \Rightarrow M_f = \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) E_c \epsilon_c \frac{b \alpha d^2}{2} + (d - d_2) E_s A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \epsilon_c$$

$$\bar{\epsilon}_c = M_f / \left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) E_c \frac{b \alpha d^2}{2} + (d - d_2) E_s A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \right]$$

ALCUL EN DOMAINE PLASTIQUE

Contrairement au domaine élastique, α ne se calcule pas indépendamment de M_f , on est en présence de deux équations du second degré imbriquées, la résolution trop fastidieuse sera traitée de façon assistée.

Des 7 équations de départ, il faut aboutir à deux équations

$$\epsilon_c = f(\alpha) \quad \text{et} \quad M_f = f(\alpha, \epsilon_c)$$

← données

on se donne des valeurs successives de α et on calcule ϵ_c et M_f
après analyse des valeurs trouvées de M_f , on retrouvera le bon α

$$(6') \Rightarrow b d \alpha \sigma_{ce} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right) + A_{s2} \sigma_{s2} = A_{s1} \sigma_{s1}$$

$$\begin{matrix} (3) & (4) \\ (1) & (2) \end{matrix} \Rightarrow A_{s1} E_s \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \epsilon_c - A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{d \alpha}\right) \epsilon_c = b d \alpha \sigma_{ce} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right)$$

$$(8) \Rightarrow \frac{\left[A_{s1} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{d \alpha}\right)\right] E_s}{b d \alpha \sigma_{ce}} \epsilon_c^2 - \epsilon_c + (0,5 \epsilon_{ce}) = 0$$

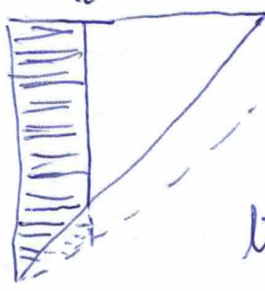
$\alpha = \alpha$

$$\boxed{\epsilon_c = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(0,5 \epsilon_{ce}) \alpha}}{2 \alpha}}$$

$$\begin{matrix} (7') \\ (2) \\ (4) \end{matrix} \Rightarrow M_f = b d \alpha \sigma_{ce} \left(-\frac{\alpha}{6} \frac{\epsilon_{ce}^2}{\epsilon_c} + \frac{\alpha-1}{2} \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c} + 1 - \frac{\alpha}{2}\right) + (d-d_2) A_{s2} E_s \times \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \epsilon_c$$

Définition d'un taux de charge en plastification béton

$\bar{\alpha} = 54\%$ on l'approximera à la somme des contraintes dans le béton



$$F = b \cdot d \cdot \sigma_c \left(1 - 0,5 \frac{\sigma_c}{\sigma_c} \right)$$

$$F_{max} = f(\sigma_{cu})$$

$$\bar{\alpha} = \frac{F}{F_{max}} = \frac{1 - 0,5 \frac{\sigma_c}{\sigma_c}}{1 - 0,5 \sigma_c / \sigma_{cu}}$$

à la limite élastique le $\bar{\alpha}$ vaut $\frac{0,5}{1 - 0,5 \times \frac{0,584}{0,5}} = 54\%$

LIMITES SUPERIEURES DU DOMAINE ELASTIQUE CALCUL EN ETAT LIMITE ELASTIQUE BETON

pour déterminer dans quel état de sollicitation on se trouve : plastique ou élastique, il est nécessaire de déterminer le chargement qui fait basculer en état plastique

Note : α étant indépendant du chargement en zone élastique on utilise $\alpha = \alpha_0$ déjà calculé

acier limitant

Mf maxi acier traction en domaine élastique

$$\epsilon_{s1} = \epsilon_{se} \quad \text{ou} \quad \sigma_{s1} = \sigma_{se}$$

$$M_f = \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) E_c b \frac{\alpha d^2}{2} \frac{\epsilon_{se}}{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} + (d - d_2) E_s A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \frac{\epsilon_{se}}{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}$$

Mf maxi acier compression en domaine élastique

$$\epsilon_{s2} = \epsilon_{se} \quad \epsilon_c = \frac{1}{1 - \frac{d_2}{\alpha d}} \epsilon_{se}$$

$$M_f = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) E_c b \frac{\alpha d^2}{2} + (d - d_2) E_s A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \right] \frac{\epsilon_{se}}{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - \frac{d_2}{\alpha d}} \epsilon_{se}$$

Béton limitant

Mf maxi béton en domaine élastique

$$\epsilon_c = \epsilon_{ce}$$

$$M_f = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) E_c b \frac{\alpha d^2}{2} + (d - d_2) E_s A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \right] \epsilon_{ce}$$

calcul de ϵ_c en domaine élastique

voir p 4

CALCUL EN ETAT LIMITE PLASTIQUE BETON

béton limitant

$$\epsilon_c = \epsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3} \quad f_c = f_{oc} = 18,16 \text{ MPa}$$

équivalent $A_{s1} f_{s1} - A_{s2} f_{s2} = b d \alpha f_{co} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{cu}}\right)$

$$A_{s1} E_s \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \epsilon_{cu} - A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{d\alpha}\right) \epsilon_{cu} = b d \alpha f_{co} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{cu}}\right)$$

$$A_{s1} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - A_{s2} \left(1 - \frac{d_2}{d\alpha}\right) = \frac{b d f_{co}}{E_s \epsilon_{cu}} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{cu}}\right) \alpha$$

$$A_{s1} - A_{s1} \alpha - A_{s2} \alpha + A_{s2} \frac{d_2}{d} = \frac{b d f_{co}}{E_s \epsilon_{cu}} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{cu}}\right) \alpha^2$$

$$\left(A_{s1} + A_{s2} \frac{d_2}{d}\right) - (A_{s1} + A_{s2}) \alpha = \frac{b d f_{co}}{E_s \epsilon_{cu}} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{cu}}\right) \alpha^2$$

$$\frac{b d f_{co}}{E_s \epsilon_{cu}} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{cu}}\right) \alpha^2 + \alpha - \frac{A_{s1} + A_{s2} \frac{d_2}{d}}{A_{s1} + A_{s2}} = 0$$

α alphan

Alphan

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1^2 + 4 a \left(\frac{A_{s1} + A_{s2} \frac{d_2}{d}}{A_{s1} + A_{s2}}\right)}}{2 a}$$

α déterminé $\Rightarrow M_f = \dots$ calcul possible

acier limitant

CALCUL EN LIMITE ACIER ELASTIQUE & BETON PLASTIQUE

très compliqué $\rightarrow$ calcul assisté

CHARGES DE REFERENCE

19

* M_f ? si 4% acier en élastique $\epsilon_c = \epsilon_{ce}$

5 acier important... pas de risque de limitation par ϵ_s

(6') $\Leftrightarrow \alpha =$ après calcul de Δ voir p 4

en prenant $A_{s1} = 0,04 \text{ dh}$

$$(7) \Rightarrow M_f = (1 - \alpha/3) \frac{b d^2}{2} \sigma_{ce} + (d - d_2) A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \epsilon_{ce}$$

* M_f ? si 4% acier en domaine plastique $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$

eqn. p 9 $\Leftrightarrow \alpha =$ après calcul de Δ

en prenant $A_{s1} = 0,04 \text{ dh}$

* M_f si limitation acier au maxi, béton au maxi

$$\epsilon_{s1} = \epsilon_{se}$$

$$\epsilon_c = \epsilon_{cu}$$

$$\epsilon_{sc} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \epsilon_{cu} \Rightarrow \alpha \epsilon_{sc} = \epsilon_c - \alpha \epsilon_{cu} \Rightarrow \alpha = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{sc} - \epsilon_{cu}}$$

$$\alpha = 0,617$$

$$(6') \Rightarrow b \alpha d \sigma_{cu} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cu}}\right) + A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d}\right) \epsilon_{cu} = A_{s1} \sigma_{se} \Rightarrow A_{s1} =$$

$$(7') \Rightarrow M_f =$$

σ_{se}
 $\wedge$ l'acier en compression est plastifié

* Section minimale pour rester en domaine élastique
béton limitant béton: $\epsilon_c = \epsilon_{ce}$

$$(7) M_f = (1 - \alpha/3) E_c b \alpha \frac{d^2}{2} \epsilon_c + (d - d_2) A_{s2} E_s \epsilon_{s2}$$

$$\frac{M_f}{\epsilon_{ce}} = (1 - \frac{\alpha}{3}) E_c b \alpha \frac{d^2}{2} + (d - d_2) A_{s2} E_s (1 - \frac{d_2}{\alpha d})$$

$$\frac{M_f \alpha}{\epsilon_{ce}} = (1 - \frac{\alpha}{3}) E_c b \alpha^2 \frac{d^2}{2} + (d - d_2) A_{s2} E_s (\alpha - \frac{d_2}{d})$$

$$E_c b \frac{d^2}{2} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha^3}{3} \right) + \left[(d - d_2) A_{s2} E_s - \frac{M_f}{\epsilon_{ce}} \right] \alpha - (d - d_2) A_{s2} E_s \frac{d_2}{d} = 0$$

$$-\frac{E_c b d^2}{6} \alpha^3 + \frac{E_c b d^2}{2} \alpha^2 + \left((d - d_2) A_{s2} E_s - \frac{M_f}{\epsilon_{ce}} \right) \alpha - (d - d_2) A_{s2} E_s \frac{d_2}{d} = 0$$

équation 3^{degré} $\alpha = \dots$

$$A_{s1} = \left[\frac{1}{2} b d \alpha \epsilon_{ce} + A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d} \right) \epsilon_{ce} \right] / E_s \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \epsilon_{ce}$$

Sections pour isosollicitation

CALCUL EN ISOSOLLICITATION BETON ACIER ELASTIQUE

$\sigma_{acier} = ?$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{ce}} &= \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{se}} \text{ soit } \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{ce}} = \frac{\epsilon_{s1}}{\epsilon_{se}} \\ (1) \quad \epsilon_{s1} &= \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \epsilon_{ce} \end{aligned} \right\} \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{\epsilon_{se}}{\epsilon_{ce}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\epsilon_{se}}{\epsilon_{ce}} + 1$$

$$\alpha = 1 / \left(\frac{\epsilon_{se}}{\epsilon_{ce}} + 1 \right)$$

$$A_{s1} = \left[0,5 b d \alpha E_c + A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d} \right) \right] / \left[E_s \frac{\epsilon_{se}}{\epsilon_{ce}} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right]$$

* Section minimale pour rester en domaine

élastique acier limitant $\epsilon_{st} = \epsilon_{se}$

$$\epsilon_c = \epsilon_{se} / \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = \epsilon_{se} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\epsilon_c = \epsilon_{se} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$Mf = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{3} \right) E_c b \alpha \frac{d^2}{2} + (d - d_2) A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d} \right) \right] \epsilon_{se} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{Mf}{\epsilon_{se}} = [\dots]$$

$$\frac{Mf}{\epsilon_{se}} - \alpha \frac{Mf}{\epsilon_{se}} = \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right) E_c b \frac{d^2}{2} \alpha^2 + (d - d_2) A_{s2} E_s \alpha - (d - d_2) A_{s2} E_s \frac{d_2}{d}$$

$$- \frac{E_c b d^2}{6} \alpha^3 + \frac{E_c b d^2}{2} \alpha^2 + \left[\frac{Mf}{\epsilon_{se}} + (d - d_2) A_{s2} E_s \right] \alpha - \left[\frac{Mf}{\epsilon_{se}} + (d - d_2) A_{s2} E_s \frac{d_2}{d} \right] = 0$$

eqn 3^{ème} degré $\Rightarrow \alpha = \dots$

$$A_{s1} = \left[\frac{1}{2} b d \alpha E_c \frac{\epsilon_{se}}{\epsilon_c} + A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d} \right) \right] \left(\frac{\epsilon_{se}}{\frac{1}{\alpha} - 1} \right) / \sigma_{se}$$

$$A_s = \left[\frac{1}{2} b d \alpha E_c + A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d_2}{\alpha d} \right) \right] / \left[E_s \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right]$$

* Section pour isosollicitation Acier et Béton en domaine
plastique

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_{st}}{\epsilon_{se}} &= \frac{1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}}{1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{cu}}} \\ \epsilon_{st} &= \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \epsilon_c \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\alpha, \epsilon_c) = 0$$

3 eqn - 3 inconnues

$$(6^e) \text{ selon équilibre } \Rightarrow g(\alpha, A_s, \epsilon_c) = 0$$

rend possible mais (paradoxique)

$$(7^e) \text{ selon } Mf \Rightarrow h(\alpha, \epsilon_c) = 0$$

trop ardue $\Rightarrow$ ABANDON

12

Section minimale d'acier pour solliciter au
maxi l'acier en domaine plastique

$$\epsilon_{s1} = \epsilon_{se} \quad \epsilon_c = \frac{\epsilon_{se}}{1/\alpha - 1}$$

eqn 7 $M_f = \dots$

$$\} \Rightarrow M_f = f(\alpha) \quad \begin{array}{l} \text{fonction} \\ \text{polynome} \\ \text{de degre 4} \end{array}$$

$\Rightarrow$ résolution assistée

$$\alpha = \dots$$

$$A_s = \frac{b d \alpha \sigma_{ce} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_{se}} (1/\alpha - 1) \right) + A_{s2} E_s \left(1 - \frac{d z}{\alpha d} \right) \epsilon_{se} / (1/\alpha - 1)}{\sigma_{se}}$$

13

CALCUL EN DOMAINE PLASTIQUE BETON PLASTIQUE ACIER COMP ELASTIQUE ACIER TRACT

$$\sigma_c = \sigma_{ce} \quad \text{et} \quad \sigma_{s2} = \sigma_{se}$$

aucun risque de $\epsilon_{s2} > \epsilon_{su}$ car $\epsilon_{cu} \gg \epsilon_{su}$ et car S_2 est proche du haut de la poutre

n1(1) $\Rightarrow$

n2(6') $\Rightarrow$ $b \alpha d \sigma_{ce} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right) + A_{s2} \sigma_{se} = A_s E_s \left(\frac{1}{2} - 1\right) \epsilon_c$

$$- A_s E_s \left(\frac{1}{2} + 1\right) \epsilon_c^2 + (b \alpha d \sigma_{ce} + A_{s2} \sigma_{se}) \epsilon_c - \frac{b \alpha d \sigma_{ce} \epsilon_{ce}}{2} = 0$$

$$\frac{A_s \left(\frac{1}{2} - 1\right) E_s}{b \alpha d \sigma_{ce} + A_{s2} \sigma_{se}} \epsilon_c^2 - \epsilon_c + 0,5 \epsilon_{ce} \frac{1 \cdot \sigma_{ce}}{b \alpha d \sigma_{ce} + A_{s2} \sigma_{se}} = 0$$

$$\epsilon_c = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0,5 \epsilon_{ce} C'}}{2 \alpha}$$

n3 (7') $\Rightarrow M_f = b d^2 \alpha \sigma_{ce} \left(-\frac{\alpha}{6} \left(\frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right)^2 + \frac{\alpha-1}{2} \left(\frac{\epsilon_{ce}}{\epsilon_c}\right) + 1 - \frac{\alpha}{2} \right) + (d-d_2) A_{s2} \sigma_{se}$

LIMITES SUPÉRIEURES DU DOMPNE PLASTIQUE ÉTENDU (Plastique de l'acier en comp)

Béton limitant $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$

$$p15 \Rightarrow b d \sigma_{cc} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}\right) + A_{s2} \sigma_{sc} = A_{s1} E_s \left(\frac{1}{2} - 1\right) \epsilon_{cu}$$

$$b d \sigma_{cc} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}\right) \alpha^2 + A_{s2} \sigma_{sc} + A_{s1} E_s \epsilon_{cu} \alpha - A_{s1} E_s \epsilon_{cu} = 0$$

$$\frac{b d \sigma_{cc} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}\right)}{A_{s2} \sigma_{sc} + A_{s1} E_s \epsilon_{cu}} \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{1 + \frac{A_{s1} E_s \epsilon_{cu}}{A_{s2} \sigma_{sc}}} = 0$$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \frac{b d \sigma_{cc} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}\right)}{A_{s2} \sigma_{sc} + A_{s1} E_s \epsilon_{cu}}}}{2 \frac{b d \sigma_{cc} \left(1 - 0,5 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cu}}\right)}{A_{s2} \sigma_{sc} + A_{s1} E_s \epsilon_{cu}}}$$

$$p15 \Rightarrow M_f = b d^2 \sigma_{cc} \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\epsilon_{cc}}{\epsilon_{cu}}\right)^2 + \frac{\alpha-1}{2} \left(\frac{\epsilon_{cc}}{\epsilon_{cu}}\right) + 1 - \frac{\alpha}{2} \right] + (d-d_2) A_{s2} \sigma_{sc}$$

CALCUL DE LA FLECHE EN DOMAINE

15

ELASTIQUE

Rappel poutre acier

notion $f_{(y)} = \frac{Mf(l/2)}{EI} y$ et $f(l/2) = \frac{Pl^3}{48EI}$

$$\Rightarrow \epsilon(y) = \frac{Mf(l/2)}{EI} y \quad \epsilon_{\max} = \frac{Mf(l/2)}{EI} \left(\frac{d}{2}\right)$$

ϵ est fonction linéaire de y (Mf , E et I sont constants)
→ variant le long de x

Cas de la poutre béton

en domaine élastique ϵ est également linéaire sans d

$$(7) \text{ et } \epsilon_c = Mf / \left[(1-\alpha) E_c \frac{b d^3}{2} + (d-d_2) E_s A_s \left(1 - \frac{d_2}{d}\right) \right]$$

on a $\epsilon_c = \frac{Mf}{EI'} \cdot \frac{d}{2}$ ← inertie équivalente

$$\Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{E_c I'}{2d}$$

$$I' = \frac{\alpha d}{E_c} \left[(1-\alpha) E_c \frac{b d^3}{2} + (d-d_2) E_s A_s \left(1 - \frac{d_2}{d}\right) \right]$$

$$\Rightarrow f = \frac{5 q l^4}{384 EI}$$

$$f = \frac{q l^2}{8} \cdot \frac{5 l^2}{48}$$

pour le domaine plastique, on peut approximer la fleche en adoptant pour rigidité E_s égale au domaine élastique

REMARQUE: AUGMENTATION DU TRAVAIL DU BETON PAR PLASTIFICATION

16

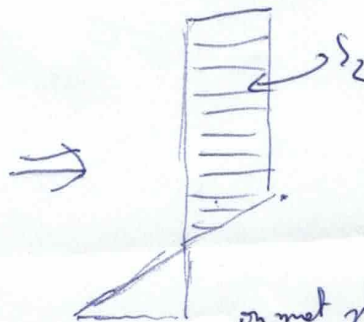
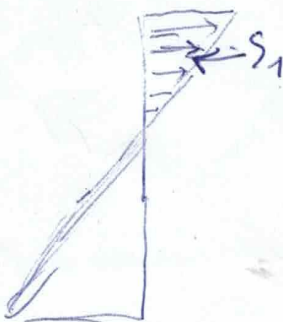
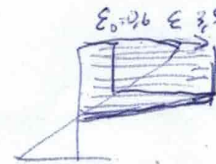
- si l'on reste dans le domaine élastique, une proportion acier/béton permet de faire travailler l'acier et le béton au maximum, mais que avec le béton, seule la fibre supérieure est au maximum et seul $0,2 \times$ hauteur de la poutre ^{de béton} est sollicitée en compression et l'on utilise beaucoup de béton % section d'acier utilisée pour

comment augmenter σ ?

- mettre plus d'acier rigidifie la partie inférieure, cela a donc tendance à faire descendre la ligne neutre et donc à faire plus travailler le béton
- "dépasser un peu" la ^{charge} contrainte σ_c de béton pour le plastifier ^{le béton} et passer de $\epsilon_c = 6 \cdot 10^{-4}$ à $3,5 \cdot 10^{-3}$ soit 7 fois plus de déformation

si plastification alors diagramme de répartition des contraintes plus favorable?

- gain en effort triangle → rectangle
- ⇒ gain en zone de travail σ plus grand
- surcharge l'acier ne peut plastifier l'acier, on ne gagne rien



$$S_2 \gg S_1$$

car rectangle au lieu de triangle
cela force plus haut

on met plus d'acier pour m ϵ_s